

14. Spadająca wieża

Fenix

Drużyna: Jan Turczynowicz, Jakub Kaszowski, Maria Żelewska, Mikołaj Czarnecki

Streszczenie

Zbadano dynamikę i stabilności wieży skonstruowanej z jednakowych cylindrycznych dysków ułożonych jeden na drugim w sytuacji gdy najniższy z nich jest szybko wysunięty spod reszty wieży. Przedstawiono jakościowy opis zjawiska oraz model teoretyczny oparty o zasady dynamiki bryły sztywnej, który pozwolił określić minimalną prędkość wysuwania dolnego dysku potrzebną do zachowania stabilności reszty wieży. Przewidywania teoretyczne zostały porównane z wartościami otrzymanymi w doświadczeniach.

1. Wstęp

Wieża zbudowana z leżących na sobie identycznych dysków jest bryłą, której stosunek wysokości do szerokości podstawy jest zazwyczaj duży (dla liczby klocków $n = 7$ jest to ok. 2:1). W takiej sytuacji położenie środka masy jest znacznie oddalone od powierzchni podstawy wieży. Obrót takiej bryły o mały kąt (ok. 30° dla $n = 7$) może przesunąć rzut środka masy na powierzchnię podstawy poza podstawę wieży, co będzie skutkowało przewróceniem się całej lub części bryły.

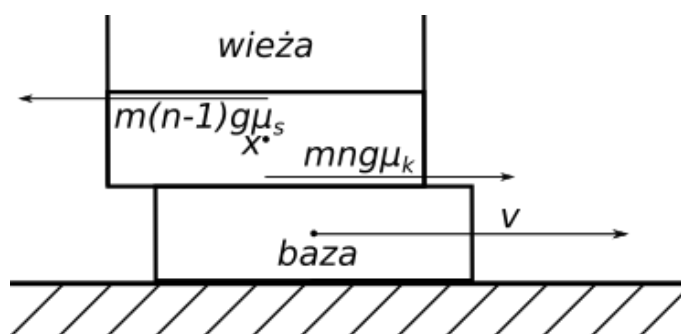
Jeśli dolny klocek (baza) jest wysuwany powoli to zostanie zerwane tarcie statyczne z podłożem, ale cała wieża będzie poruszać się jako jedna całość. Jeśli jednak baza jest wysuwana szybko, tak że następuje zerwanie tarcia statycznego między bazą a resztą wieży, można go wysunąć spod wieży. Dodatkowo jeśli taki klocek jest wysuwany dostatecznie szybko (np. 0.4 m/s) i czas działania siły tarcia na resztę wieży jest mały (np. 0.04 s) wysunięcie bazy nie spowoduje przewrócenia się reszty wieży – czyli po upadnięciu na podłoże wieża zachowa stabilność.

Zbadanie jak szybko należy wysunąć bazę aby nie przewrócić stojącej na nim wieży oraz jak ta prędkość zależy od istotnych parametrów układu było głównym przedmiotem badań opisanych w poniższej pracy.

2. Opis jakościowy

Gdy baza jest wysuwana z pod reszty wieży, działa między nimi siła tarcia kinetycznego. Siła ta działa do momentu całkowitego wysunięcia bazy i utraty jej kontaktu z resztą wieży. Jej działanie powoduje zmianę całkowitego pędu i momentu pędu wieży. W ten sposób wieża uzyskuje prędkość postępową i kątową. Po usunięciu bazy wieża opada swobodnie, następuje zderzenie z podłożem i po dyssypacji energii kinetycznej układu może ona zachować stabilność (dyski składające się na wieżę nadal stoją jeden na drugim) lub utracić stabilność (jedne lub więcej dysków, nie licząc najniższego dysku, spadnie na płaszczyznę podstawy).

Jednym z czynników wpływających na stabilność wieży jest jej dynamika podczas wysuwania bazy. W tej fazie tarcie statyczne między najniższym dyskiem wieży (podstawą, oznaczoną przez x na Rys. 1) a resztą wieży utrzymuje ją w jednym kawałku. Gdy warunek tarcia statycznego nie jest



Rys. 1. Siły działające na podstawę wieży

już spełniony, wieża nie może być traktowana jako pojedyncza bryła sztywna – podstawa wieży porusza się względem reszty i jest dużo bardziej prawdopodobne, że ulegnie ona wywróceniu.

Na Rys. 1 przedstawiono siły tarcia działające na podstawę wieży. Przyjęto, że występuje poślizg między podstawą a bazą i tarcie statyczne między podstawą a pozostałą częścią wieży. Równanie Newtona dla ruchu środków mas podstawy i reszty wieży w osi poziomej, w przypadku gdy występuje tarcie statyczne przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= mgn\mu_k - T \\ m(n-1)\ddot{y} &= T \end{aligned}$$

gdzie: x, y – położenie środka masy odpowiednio podstawy i reszty wieży, T – siła tarcia statycznego między wieżą a podstawą, μ_k – współczynnik tarcia kinetycznego między podstawą a bazą, n – ilością dysków w wieży, m – masą cylindra, a g – przyspieszenie ziemskie. Aby zachodził warunek tarcia statycznego nie może być poślizgu między podstawą a resztą wieży:

$$\ddot{x} = \ddot{y}$$

Rozwiązując powyższe równania i wyznaczając tarcie statyczne jako:

$$T = mg(n-1)\mu_s$$

otrzymujemy warunek na występowanie tarcia statycznego między podstawą, a resztą wieży:

$$\mu_s \geq \mu_k$$

gdzie: μ_s – współczynnik tarcia statycznego. Warunek ten jest zawsze prawdziwy, gdyż dla użytych przez nas materiałów maksymalny współczynnik tarcia statycznego jest zawsze większy od współczynnika tarcia kinetycznego. Wynika z tego, że wieżę w trakcie wysuwania się bazy można traktować jako spójną bryłę sztywną.

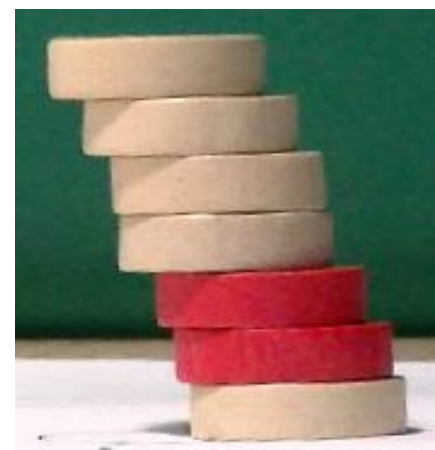
Siła tarcia działa na spód wieży wywołując jej ruch obrotowy (Zdj. 1). Do momentu kolizji z podłożem wieża porusza się ruchem zbliżonym do ruchu bryły sztywnej, kończącym się kolizją z ziemią. Po kolizji spodni klocek wieży nie przesuwa się względem ziemi, w takim razie, w przybliżeniu, położenie środka masy wieży w momencie kolizji z podłożem będzie decydowało o stabilności wieży (pomijając prędkości poziomą wieży, która jest mała). Dokładniejsza analiza nagrań wideo pokazuje, że po kolizji klocki obracają się tak żeby ich podstawy znowu były poziomo – tak jak przed rozpoczęciem eksperymentu (Zdj. 2).

3. Model teoretyczny

W celu dokonania ilościowego opisu zjawiska rozważono model teoretyczny oparty o zasady dynamiki bryły sztywnej. Układ został podzielony na bazę (cylinder znajdujący się najniżej) oraz wieżę (pozostałe cylindry) traktowaną jako spójna bryła sztywna. Ponieważ baza i wieża znajdują się w kontakcie ze sobą, oddziałują one na siebie siłą reakcji i tarcia. Podobnie na bazę działa siła reakcji i tarcia od podłoża. Na oba ciała (bazę i wieżę), działa siła grawitacji przyłożona w środku masy obiektów. Przyjęto, że masa pojedynczego cylindra jest równa m , jego wysokość wynosi h , a promień wynosi r , wieża jest zbudowana z n cylindrów. Wielkości opisujące parametry wieży zostały przedstawione na Rys. 2.



Zdj. 1. Obrót wieży wywołany wysunięciem bazy



Zdj. 2. Rozsuniecie się cylindrów po kontakcie z podłożem

Wyznaczając dynamikę układu uwzględniono ruch postępowy środka masy wieży w pionie oraz jej ruch obrotowy. Gdy baza zostanie usunięta w bardzo krótkim czasie, wieża zaczyna upadać na podłoże zgodnie z prawem ciężenia (ruch jednostajnie przyspieszony) oraz uzyskuje ona pewną prędkość kątową wywołaną działaniem momentu siły tarcia dynamicznego między wieżą a bazą. Jeśli baza jest usunięta odpowiednio szybko to nadana wieży pozioma prędkość liniowa jest mała w porównaniu z innymi wielkościami i można ją zaniedbać. Kąt obrotu od pionu oraz położenie środka masy wieży można zatem opisać przy pomocy równań:

$$\alpha(t) = \omega t$$

$$H_o(t) = h + \frac{H}{2} - \frac{1}{2}gt^2$$

W pewnym momencie (t_f) następuje kolizja jednego z rogów wieży (A) z podłożem. Odległość punktu A od podłoża (h_A) zmienia się w czasie zgodnie ze wzorem:

$$h_A(t) = h + \frac{H}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{d^2 + H^2} \cos(\omega t - \beta) - \frac{1}{2}gt^2$$

gdzie $\tan(\beta) = d/H$. Dla uproszczenia przyjęto, że wieża zachowa stabilność jeśli w momencie kolizji z podłożem położenie środka masy (O) będzie znajdowało się nad rzutem podstawy wieży na podłoże, innymi słowy kąt obrotu wieży w momencie uderzenia rogu A o podłoże jest mniejszy niż krytyczna wartość:

$$\alpha(t_f) < \beta$$

Równanie na $h_A(t)$ nie pozwala w prosty sposób wyznaczyć czasu (t_f) po jakim nastąpi kolizja wieży z podłożem. Można jednak zauważyć, że w sytuacji granicznej oddzielającej sytuację stabilną od niestabilnej (tj. $\alpha = \beta$):

$$0 = h_A(t_f) = h + \frac{H}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{d^2 + H^2} - \frac{1}{2}gt_f^2$$

wówczas:

$$t_f = \sqrt{\frac{2h + H - \sqrt{d^2 + H^2}}{g}}$$

a prędkość kątową, dla której po czasie t_f zachodzi warunek $\alpha = \beta$ wynosi:

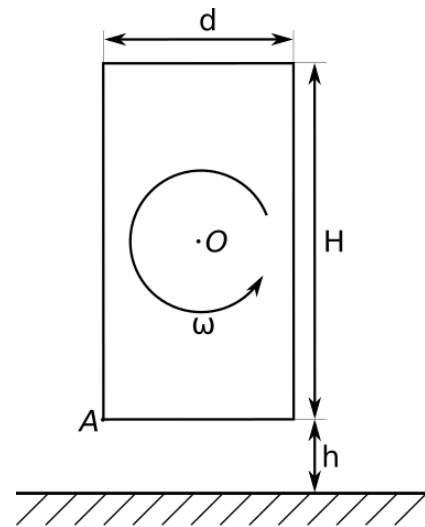
$$\omega_c = \sqrt{\frac{g}{2h + H - \sqrt{d^2 + H^2}}} \left(\frac{d}{H}\right)$$

Zmiana momentu pędu wieży wskutek wysunięcia bazy spowodowana jest działaniem momentu siły tarcia między bazą a wieżą. Na podstawie dynamiki ruchu obrotowego bryły sztywnej można wyznaczyć czas jaki trwa wysunięcie bazy spod wieży:

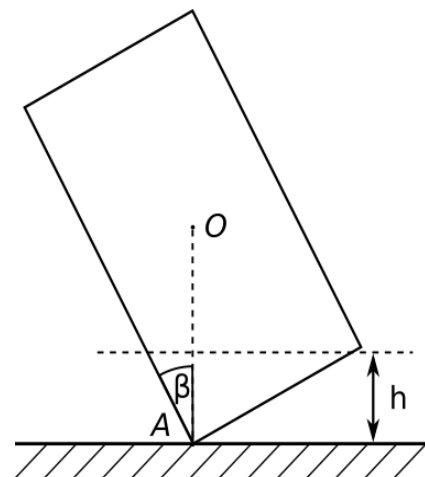
$$t = \frac{2 I \omega}{H M g \mu}$$

gdzie μ jest to współczynnik tarcia kinetycznego między cylindrami, M jest całkowitą masą wieży. Podstawiając krytyczną wartość prędkości kątowej do powyższego równania otrzymuje się:

$$t_c = \sqrt{\frac{g}{2h - \sqrt{d^2 + H^2} + H}} \frac{2 I}{H M g \mu} \left(\frac{d}{H}\right)$$



Rys. 2. początek ruchu bryły sztywnej

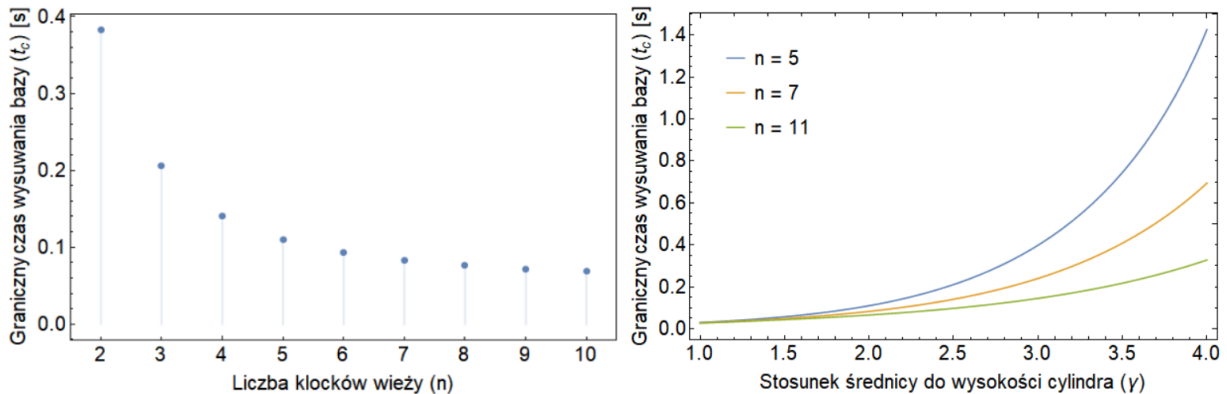


Rys. 3. sytuacja graniczna

Równanie to można przekształcić podstawiając: $I = M(3d^2 + H^2)/12$, i $H = n h$; oraz wprowadzając bezwymiarowe zmienne: $\gamma = d/h$ oraz $\tau = t\sqrt{g/h}$:

$$\tau_c = \frac{1}{6\mu} \frac{(n^2 + 3\gamma^2)(\gamma/n)}{n\sqrt{2 + n - \sqrt{n^2 + \gamma^2}}}$$

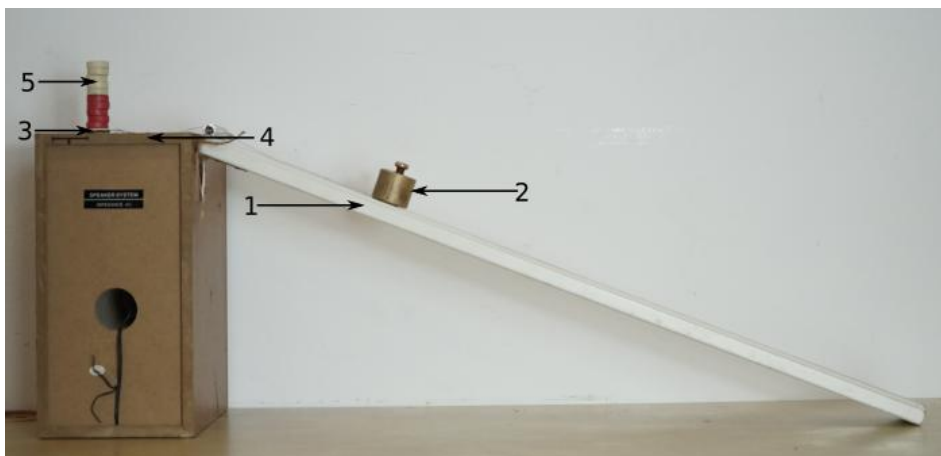
Na podstawie powyższej zależności można stwierdzić, że maksymalny czas przez jaki podstawa może znajdować się pod wieżą podczas wysuwania, tak aby zachować jej stabilność, jest odwrotnie proporcjonalny do współczynnika tarcia między klockami. Zależność od pozostałych parametrów (γ , n) została przedstawiona na poniższych wykresach (Rys 4).



Rys. 4. Wykres wartości maksymalnego czasu przez jaki może być wysuwana baza spod wieży dla wartości tarcia kinetycznego $\mu = 0.1$ i wysokości cylindrów $h = 5 \text{ mm}$, w funkcji liczby cylindrów, z których składa się wieża dla $\gamma = 2$ (po lewej) oraz w funkcji parametru γ (po prawej).

Dla większej liczby cylindrów wieży (n) aby zachować stabilność upadającej wieży należy szybciej usunąć bazę. Maksymalny dopuszczalny czas usuwania bazy rośnie wraz ze wzrostem stosunku średnicy dysków do ich wysokości (γ). Obserwacja ta zgadza się z intuicją – łatwiej jest zachować stabilność wieży utworzonej z bardziej płaskich dysków.

4. Układ pomiarowy



Zdj. 3 Układ doświadczalny użyty do analizy stabilności wieży

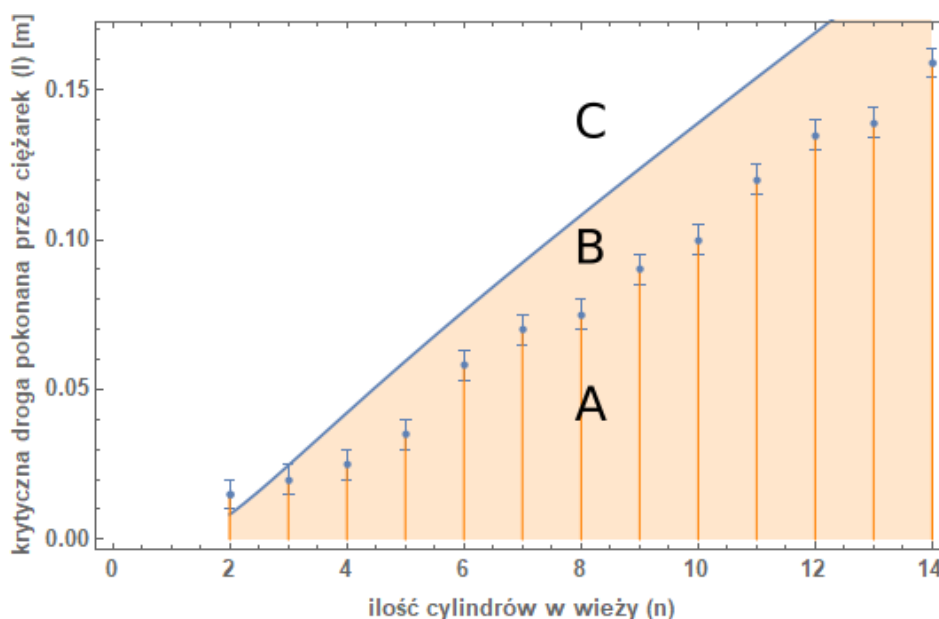
Układ doświadczalny składał się z równi pochyłej z podziałką milimetrową (1), po której zsuwał się 200 gramowy obciążnik (2) połączony sznurkiem z drewnianym dyskiem – bazą (3), stojącym na płaskiej powierzchni nad równią (4), na którym układano następne dyski (5) tworząc wieżę.

Pomiar przeprowadzono poprzez ustawienie odważnika w wybranej odległości (l) od miejsca, w którym sznurek łączący ciężarek z bazą zostaje całkowicie naciągnięty. Ciężarek został zwolniony i poruszał się z przyspieszeniem a do momentu, w którym sznurek został całkowicie naciągnięty. Wtedy baza zaczyna się poruszać z prędkością równą prędkości ciężarka. Ponieważ masa bazy jest znacznie mniejsza od masy ciężarka przyjęto, że nie powoduje to istotnego spowolnienia ciężarka. W dalszej części ruchu baza i ciężarek połączone sznurkiem razem kontynuują ruch z przyspieszeniem a . Po przebyciu drogi d baza zostaje usunięta spod wieży, a czas wysuwania bazy jest równy:

$$t = \frac{\sqrt{2 a(l + d)} - \sqrt{2 a l}}{a}$$

Wartość przyspieszenia dla użytego ciężarka i równi wyznaczono w niezależnym eksperymencie i otrzymano wartość $a = (0.95 \pm 0.01) \text{ m/s}^2$.

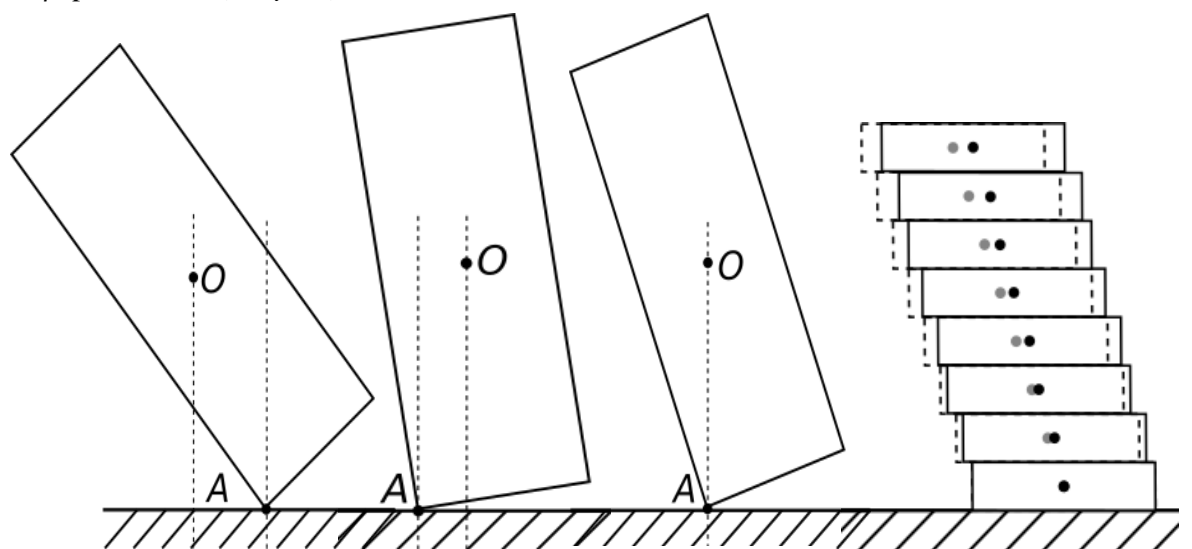
Ciężarek puszczano wielokrotnie, w kolejnych próbach stopniowo zwiększając odległość l . W ten sposób wyznaczono minimalną wartość odległości l potrzebną do stabilnego wyrwania bazy spod wieży. Pomiary powtórzono dla wież składających się z $n \in \{2, \dots, 14\}$ cylindrów. Wyniki porównano z przewidywaniami teoretycznymi, używając wzór na czas krytyczny (t_c) i wyznaczając krytyczną wartość odległości l na podstawie powyższego wzoru. Porównanie przewidywań teoretycznych i danych doświadczalnych zamieszczono na poniższym wykresie.



Rys 5. Pomiary minimalnej odległości l potrzebnej do usunięcia bazy zachowując stabilność wieży (wykres punktowy) oraz zależność teoretyczna (linia ciągła). Pionowe pomarańczowe kreski oraz beżowy obszar wyznaczają zakres parametrów dla których wieża będzie niestabilna (odpowiednio uzyskany doświadczalnie i teoretycznie).

Wartości przewidziane przez model teoretyczny są zbliżone do faktycznych wartości otrzymanych w doświadczeniu dla przypadku wieży złożonej z dwóch i trzech cylindrów. W pozostałych przypadkach model teoretyczny zakłada większy zakres drogi powodującej wywrócenie się wieży niż jej obserwowana w rzeczywistości. Aby zrozumieć różnicę między zaproponowanym modelem teoretycznym można wyróżnić trzy sytuacje:

- Obszar A: wyniki doświadczeń zgadzają się z modelem teoretycznym. Kąt między podstawą wieży a podłożem jest duży, więc środek masy jest mocno wysunięty poza podstawę i wieża na pewno się przewróci (cf Rys 5)
- Obszar C: teoria również zgadza się z doświadczeniami. Tutaj kąt między podstawą a podłożem jest mały a środek masy wieży leży głęboko w granicy podstawy więc wieża się ustabilizuje (cf Rys 6).
- Obszar B Model teoretyczny przewiduje że wieża się wywróci jednak z doświadczenia wskazują na stabilizację w tym obszarze. Są to momenty graniczne pomijane przez teorię ze względu na jej uproszczenia (cf Rys. 7).



Rys. 5. wieża się ustabilizuję

Rys. 6. wieża się ustabilizuję

Rys. 7. Moment graniczny, teoria przewiduje wywrócenie się wieży, która obróci się o znikomy kąt w lewo

Rys. 8. Rzeczywiste mniejsze rozsuniecie się dysków wynikające z posiadanej przez nie prędkości uzyskanej podczas opadania

Tworząc model teoretyczny pominięto przesuwanie się środków mas poszczególnych cylindrów co przy wartościach granicznych może mieć wpływ na stabilizację wieży. Największy wpływ na zmianę położenia środków mas względem siebie ma prędkość nabyta podczas opadania którą posiadają poszczególne cylindry, która może przy wieży o dużym stosunku wysokości do średnicy i przy wartościach granicznych, powodować przesunięcie do siebie środków masy poszczególnych dysków zmniejszając podatność wieży na wywrócenie się wieży (Rys. 8). W przypadku niskich stosunków wysokości do średnicy prędkość będzie mogła powodować zwiększenie podatności na wywrócenie

5.Podsumowanie

Została opisana dynamika wieży wywołana szybkim wysunięciem bazy. Przedstawiony model teoretyczny umożliwiający wyznaczenie maksymalnego czasu wysuwania bazy zapewniającego jej stabilność. Stworzono układ doświadczalny pozwalający zbadać zachowanie wieży w zależności od ważnych parametrów takich jak liczba klocków. Wyniki zostały porównane z przewidywaniami teoretycznymi a zaobserwowane różnice zostały wyjaśnione jakościowo.

6.Bibliografia

- [1] D. Ralliday, R Resnick, J Walker, *Podstawy Fizyki:1*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa (2018)
- [2] Wikipedia, wolna encyklopedia: „*List of Moments of inertia*”, Wikipedia.org, stan na 15.01.202